Exercice 7 On considère un dé à 6 faces équiprobables. Un joueur a le choix de lancer ce dé 1, 2 ou 3 fois, il obtient alors pour gain la valeur du dernier lancé effectué.

En supposant les 3 tirages indépendants, l'objectif de cet exercice est déterminer la stratégie optimale en moyenne de ce joueur.

1. Calculer l'espérance du gain si l'on effectue un seul tirage.
2. Si le joueur doit choisir un nombre de tirages fixe (déterministe), *avant le début du jeu*, a t'il intérêt à choisir entre jouer 1, 2 ou 3 fois ?
3. Quel est le gain optimal moyen du joueur, s'il connait les résultats des 3 tirages (le gain est alors le maximum des 3 tirages indépendants) ?

On suppose maintenant que le joueur peut tenir compte des tirages déjà effectués.

4. Montrer que la stratégie optimale (en moyenne), si l'on se restreint à 2 tirages maximum, est la suivante : si le premier tirage vaut 4, 5 ou 6 s'arrêter, sinon rejouer. Calculer la moyenne du gain de cette stratégie optimale.
5. En utilisant la question précédente identifier la stratégie optimale lorsque l'on joue 3 fois. Calculer la moyenne du gain de cette stratégie optimale.

Exercice 8 On considère une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$, sur un espace fini E, de matrice de transition P, issue d'un point $x_0 \in E$ (i.e. $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1$).

On cherche $(u(n,x), n = 0, \ldots, N, x \in E)$ une solution à l'équation

$$\begin{cases} u(n,x) = \max\left\{ \sum_{y \in E} P(x,y)u(n+1,y), f(n,x)\right\}, n < N, x \in E \\ u(N,x) = f(N,x), x \in E. \end{cases} \tag{1}$$

Montrer qu'il existe une solution à cette équation (1) et que cette solution est unique.

Exercice 9 Avec les notation de l'exercice précèdent, on note u la solution unique de (1).

1. Montrer que pour tout temps d'arrêt τ, et pour tout n, il existe, un ensemble $\bar{A}_n \subset E^{n+1}$ tel que
$$\{\tau \geq n+1\} = \{\tau \leq n\}^c = \{X_{0:n} \in \bar{A}_n\}.$$
où $X_{0:n} = (X_0, \ldots, X_n)$.
2. Montrer que, quel que soit le temps d'arrêt τ plus petit que N, $\mathbb{E}\left(u\left(n \wedge \tau, X_{n\wedge\tau}\right)\right)$ est décroissant en n pour $0 \leq n \leq N$ (s'aider des transparents du cours au besoin).
3. En déduire que pour tout temps d'arrêt τ plus petit que N, $u(0,x_0) \geq \mathbb{E}\left(f\left(\tau, X_\tau\right)\right)$.
4. On note $\tau_0 = \inf\{n \geq 0, u(n,X_n) = f(n,X_n)\}$. Montrer que τ_0 est un temps d'arrêt plus petit que N.
5. Montrer que $\mathbb{E}\left(u\left(n \wedge \tau_0, X_{n\wedge\tau_0}\right)\right)$ ne dépend pas de n, pour $0 \leq n \leq N$ (s'aider des transparents du cours au besoin).
6. En déduire que $u(0,x_0) = \mathbb{E}\left(f\left(\tau_0, X_{\tau_0}\right)\right) = \sup_{0 \leq \tau \leq N, \text{t.a.}} \mathbb{E}\left(f\left(\tau, X_\tau\right)\right)$.

Exercice 10 On considère une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ sur l'espace d'état $\{1,2\}$ de matrice de transition P $(0 < p < 1)$

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{pmatrix},$$

issue de 1 à l'instant 0 (i.e. $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$).

1. Montrer que, si $n \geq 1$, la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 2) = 1 - p$.
2. En déduire que $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi.
3. On s'intéresse au problème d'arrêt optimal pour cette chaîne de Markov avec comme gain à l'instant n, $f(n, x) = \rho^n \mathbf{1}_{\{x=1\}}$. On suppose que $\rho > 0$ et $p\rho > 1$. Montrer que la solution u de l'équation (1) est donnée, pour $n < N$, par $u(n, 1 \text{ ou } 2) = p\rho^N$ et pour $n = N$ par $u(N, x) = \rho^N \mathbf{1}_{\{x=1\}}$.
4. En déduire que le temps d'arrêt τ_{opt} optimal (unique dans ce cas) est donné par $\tau_{opt} = N$. Comment interpréter ce résultat ?
5. On pose $\bar{\tau}_{opt} = \sup \{n \geq 0, X_n = 1\}$. Vérifier que $\bar{\tau}_{opt}$ est l'unique temps aléatoire tel que
$$f(\bar{\tau}_{opt}, X_{\bar{\tau}_{opt}}) = \arg\max \{0 \leq n \leq N, f(n, X_n)\}.$$
6. Vérifier que $\mathbb{E}\left(f(\bar{\tau}_{opt}, X_{\bar{\tau}_{opt}})\right) > \mathbb{E}\left(f(\tau_{opt}, X_{\tau_{opt}})\right)$. $\bar{\tau}_{opt}$ peut-il être un temps d'arrêt ?